Processus stochastique non linéaire associé à un système parabolique.

Siham Filali*

Laboratoire de Mathématiques Appliquées F.R.E. CNRS 2222
Université des Sciences et Technologies de Lille
59 655 Villeneuve d'Ascq cedex France.

Résumé

On considère le système des équations aux dérivées partielles suivant :

$$\text{S(d)}\begin{cases} \partial_t\rho + \sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}(u_j+b_j)\rho = \frac{\nu^2}{2}\Delta\rho \\ \partial_t(u_k\rho) + \sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}u_k(u_j+b_j)\rho = \frac{\nu^2}{2}\Delta u_k\rho \\ \forall 1\le k\le d \qquad \rho(dx,t)\to\rho_0, \quad u_k(x,t)\rho(dx,t)\to v_k(x)\rho_0 \\ \text{faiblement pour } t\to 0^+ \\ \rho_0, v \text{ sont donnés} \end{cases}$$

B_t désignant un mouvement brownien, on construit le processus $X = (X_t,\ t\ge 0)$, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = [E[v(X_0)/X_t] + b(X_t,t)]dt + \nu B_t \tag{1}$$

et nous montrons que $u(x,t) = E[v(X_0)/X_t = x]$ et la famille de densités de probabilités de X, $(\rho_t,\ \ t>0)$, constituent l'unique solution faible du système $S(d)$.

Abstract

We consider the system of equations $S(d)$ with initial distribution of masses $\rho(dx,0)$ and initial velocities v. We construct the stochastic process that satisfies the nonlinear stochastic differential equation (1). We then solve the system $S(d)$ in the weak sense.

*siham.filali@sophia.inria.fr

AMS Classifications: 52A10-52A22-60G44-60H10-60H30

Mots-clés: Équations différentielles stochastique non linéaire; problème de martingale; propagation en chaos conditionnelle.

1 Introduction

Soit $b : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ une fonction bornée; considérons le système suivant

$$\mathrm{S(d)} \begin{cases} \partial_t \rho + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_j + b_j)\rho = \frac{\nu^2}{2}\Delta\rho \\ \partial_t(u_k\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u_k(u_j + b_j)\rho = \frac{\nu^2}{2}\Delta u_k\rho \\ \forall 1 \leq k \leq d \qquad \rho(dx,t) \to \rho_0, \quad u_k(x,t)\rho(dx,t) \to v_k(x)\rho_0 \\ \text{faiblement pour } t \to 0^+. \end{cases}$$

Le cas $b = 0$ et $\nu = 1$ a déjà été traité par A. Dermoune [1]. Dans la continuité de ce travail on se propose ici de résoudre le cas général.
Le but de la première partie de cet article est de montrer que $S(d)$ possède une solution faible. Pour cela nous étudions l'existence de la solution de (1). Pour construire le processus solution de (1),nous utiliserons principalement la notion de propagation en chaos conditionnelle, introduit par W.A. Zheng [5].
Dans le second paragraphe, nous rappelons quelques lemmes et résultats que l'on doit à D. Strook, S.R.S Varadhan [4] et K. Oelshlager [3].
Nous pouvons alors dans la dernière partie grâce aux estimations (théorème 6) montrer que le système des équations aux dérivée partielles $S(d)$ possède une solution unique.

2 L'existence de la solution.

Théorème 1:
Soient $d \geq 1$ un entier et v une fonction continue, bornée de $\mathbf{R}^d$ sur $\mathbf{R}^d$. Soit $b : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ tel que

$$i)\text{pour} \quad A < \infty \qquad \sup_{\substack{t\geq 0 \\ x\in\mathbf{R}^d}} |b(x,t)| \leq A, \tag{2}$$

$$ii) \text{ pour tous } \ x,\ y\ \in \mathbf{R}^d,\ \ t \geq 0 \quad |b(x,t) - b(y,t)| \leq A|x-y|,$$

Il existe une solution faible à l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = \Big(E[v(X_0)/X_t] + b(X_t,t)\Big)dt + \nu\ dB_t. \tag{3}$$

Remarque :
On vérifié aisément que l'existence de la solution faible de $S(d)$ s'ensuit de celle de (3).
En effet, soit X_t solution de (3) et $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ de classe C^2 à support compact.
D'après la formule de Itô on a:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_s f(X_s)ds. \tag{4}$$

où

$$L_s = \frac{\nu^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d}[u(x,s)+b(x,s)]\frac{\partial}{\partial x_j}\ .$$

Si on note ρ_t la loi de X_t, $u(x,t) = E[v(X_0)/X_t = x]$ et en prenant l'espérance des deux membres de (4), on obtient:

$$\int f(x)[\rho(dx,t) - \rho_0(dx)] = \int_0^t \int \sum_{j=1}^{d}\Big[b_j(x,s) + u_j(x,s)\Big]\rho(dx,s)\partial_{x_j}f(x)ds$$
$$+ \frac{\nu^2}{2}\int_0^t \int \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_j x_i} f(x)\rho(dx,s)ds$$

ce qui après intégration par parties donne:

$$\int f(x)[\rho(dx,t) - \rho_0(dx)] = -\int_0^t \int f(x)\sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}\Big[(u_j+b_j)\rho(dx,s)\Big]ds$$
$$+ \frac{\nu^2}{2}\int_0^t \int f(x)\sum_{i,j=1}\partial^2_{x_i x_j}\rho(dx,s)ds.$$

Il suit de ceci que ρ est solution faible de la première équation du système $S(d)$. Pour la deuxième équation du système, il suffit de multiplier l'expression (4) par u_k et calculer son espérance. $\blacksquare$

Preuve du théorème:
Soit ϕ une densité de probabilité symétrique sur $\mathbf{R}^d$. Notons $\phi^n(x) = n^d\phi(x)$, $(B^1, ..., B^N)$ désignant N mouvement browniens linéaires indépendants.

Soit $X_t^{N,n} = (X_t^{i,N,n},\ 1 \leq i \leq N)$ la solution de l'équation différentielle stochastique N-dimensionnelle:

$$dX_t^{i,N,n} = \left[\frac{\sum_{j\neq i} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})}{\sum_{j\neq i}\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})} + b(X_t^{i,N,n}, t)\right]dt + \nu dB_t^i,$$

On déduit l'existence de ce système de celle du problème de martingale: il existe un processus $X_t^{i,N,n}$ tel que

$$f(X_t^{i,N,n}) - \int_0^t L_s f(X_s^{i,N,n})ds \qquad \text{est une martingale,}$$

avec

$$L_s = \frac{\nu^2}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_1(x,s)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

et

$$b_1(X_s^{i,N,n}, s) = \frac{\sum_{j\neq i} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})}{\sum_{j\neq i}\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})} + b(X_s^{i,N,n}, s).$$

$X_t^{i,N,n}$ est donc un processus de Itô de covariance νI_d et de dérive b_1.
Enfin d'après le Théorème 4.5,1 du livre [4] on a

$$dX_t^{i,N,n} = b_1(X_t^{i,N,n}, t)dt + \nu dB_t^i.$$

Maintenant on va faire tendre N vers l'infini.
On sait par hypothèse que v et b sont bornés.
Nous posons

$$A_t^{i,N,n} = \int_0^t b_1(X_s^{i,N,n}, s)ds \qquad \text{et} \qquad M_t^{i,N,n} = \nu B_t^i;$$

on a

$$X_t^{i,N,n} = X_0^{i,N,n} + A_t^{i,N,n} + M_t^{i,N,n}.$$

Pour chaque $p > 1$ les processus $X_0^{i,N,n}$ et $\int_0^1 |b_1(X_s^{i,N,n}, s)|^p ds$ sont uniformément bornés en probabilité, d'après (2).
Par conséquent, en utilisant le théorème 3 de [2], $(X_t^{i,N,n},\ N \geq 1)$ est C-tendue, ainsi que $(X_t^{i,N,n}, A_t^{i,N,n}, M_t^{i,N,n})$.
Notons $(X_t^{i,n}, A_t^{i,n}, M_t^{i,n})$ une valeur d'adhérence $(X_t^{i,N,n}, A_t^{i,N,n}, M_t^{i,N,n})$ quand $N \to \infty$, donc d'après le théorème de représentation de Skorohod, on a

$$X_t^{i,n} = X_0^{i,n} + \int_0^t \left[\frac{R_s^{i,n}(1)}{R_s^{i,n}(0)} + b(X_s^{i,n}, s)\right]ds + \nu\ B_t^i. \tag{5}$$

Il nous reste à montrer

$$R_s^{i,n}(1) = \int\int v(y)\phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_{0,t}^n(dy, dz) \tag{6}$$

et

$$R_s^{i,n}(0) = \int \phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_t^n(dz). \tag{7}$$

En effet $(X_t^{i,n,K}, i \geq 1)$ est symétrique, d'où pour $J < K$,

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big|\frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{j,n,K}) \\
&- \frac{1}{K-1}\sum_{j=2}^{K} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{j,n,K})\Big|^2\Big] \\
&= \frac{1}{(J-1)^2(K-1)^2}\Big[\Big((K-1)^2(J-1) + (J-1)^2(K-1) \\
&- 2(J-1)(K-1)(J-2))E[v(X_0^2)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{2,n,K})]\Big)^2\Big] \\
&+ ((K-1)^2(J-2)(J-3) + (J-1)^2(K-2)(K-3) \\
&- 2(J-1)(K-1)(J-2)(K-3))E\Big[v(X_0^2)v(X_0^3)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{3,n,K})\Big].
\end{aligned}$$

Faisant tendre $K \to \infty$, on déduit l'existence d'une fonction $C(n, J)$ telle que

$$\lim_{J\to\infty} C(n, J) = 0$$

et

$$E[|R_t^{1,n}(1) - \frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n} - X_t^{j,n})|] \leq C(n, J). \tag{8}$$

De la même manière on montre que

$$E[|R_t^{1,n}(0) - \frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} \phi^n(X_t^{1,n} - X_t^{j,n})|] \leq C(n, J).$$

Si on note $\mathcal{X} = C([0,T], \mathbf{R}^d)$, alors $(X^{i,n}) \in \mathcal{X}$.
Pour tous N et tous $1 \leq i_1 < ... < i_N$, on a

$$loi(X^{1,n}, ..., X^{N,n}) = \ loi(X^{i_1,n}, ..., X^{i_N,n}).$$

Soit $\pi : \{1, 2, ..\} \to \{1, 2, ..\}$ une bijection qui permute un nombre fini d'élément, soit Π l'ensemble de ces permutions, $\mathcal{B}^\infty$ l'ensemble des boréliens

de $\mathcal{X}^\infty$ et $X = (X^{i,n})$.
On note $\pi X = (X^{\pi(i),n})$, alors

$$\mathcal{S} = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^\infty, P[X^{-1}(B)\Delta(\pi X)^{-1}(B)] = 0, \forall \pi \in \Pi\}$$

est le σ-algèbre des événements permutables de $\mathcal{X}$.
Rappelons le théorème suivant qu'on trouve dans [5] et qu'on utilise dans la suite.
Théorème 2:
a) $(X^{i,n}, i \geq 1)$ sont indépendant et identiquement distribués sachant $\mathcal{S}$. De plus, il existe une probabilité conditionnelle P^ω pour $(X^{i,n})$ sachant $\mathcal{S}$ telle que pour chaque $\omega \in \Omega$, les variables aléatoires coordonnées (x^i) de l'espace probabilisé $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P^\omega)$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
b) De plus si pour chaque fonction f mesurable élément de $\mathcal{X}$, $f(X^{i,n})$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes de S.
On déduit de la loi forte des grands nombres, sous la loi conditionnelle, que

$$\frac{1}{J-1}\sum_{j\neq i}^{J} v(X_0^j)\phi^n(x - X_t^{j,n}) \longrightarrow \int\int v(y)\phi^n(x-z)\rho_{0,t}^n(dy,dz)$$

et

$$\frac{1}{J-1}\sum_{j\neq i}^{J} \phi^n(x - X_t^{j,n}) \longrightarrow \int\int \phi^n(x-z)\rho_t^n(dz).$$

On en déduit (6). D'après l'équation (5) et b) du théorème 2 , sous la probabilité P^ω, on a:

$$X_t^{i,n} = X_0^{i,n} + \int_0^t \frac{\int\int v(y)\phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_{0,t}^n(dy,dz)}{\int \phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_t^n(dz)}\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^{i,n}, s)dB_s^i.$$

Deuxième étape: on fait tendre n vers l'infini.
A partir de (5), on déduit $X_t^{i,n}$ est C-tendue, d'où une limite

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t g(s)ds + \nu B_t^i.$$

Avant de poursuivre, nous allons avoir besoin de quelques lemmes.

3 Quelques lemmes et résultats intermédiaire

On se propose maintenant de donner des résultats utiles pour la suite. Pour commencer, on rappelle le résultat suivant, que l'on doit à D. Strook, S.R.S

Varadhan [4] et qui donne une condition pour qu'une suite de densité qui converge faiblement, converge dans L^1.
Lemme 3: ([4], lemme 11.4.1)
Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions positives $B_{\mathbf{R}^d}$ mesurables, vérifiant:

$$i)\ \text{Pour tout } \ n \geq 1 \qquad \int f_n(x)dx = 1,$$

$$ii)\ \lim_{n\to 0} \sup_{h\geq 1} \int |f_n(s+h) - f_n(x)|dx = 0.$$

On suppose qu'il existe $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ tel que, pour tout $\psi \in C_b(\mathbf{R}^d)$,

$$\int f(x)\psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\psi(x)dx.$$

Alors $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^d)$.

Nous aurons également besoin dans la suite du résultat suivant, qui est le théorème 9.1.15 dans [4]
Lemme 4:
Soient $a : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \to S_d^+$ et $b : [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ deux fonctions mesurables bornées. Pour chaque $T > 0$, on suppose qu'il existe $0 < \lambda_T \leq \Lambda_T < \infty$, $B_T < \infty$ et $\delta_T : (0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction croissante tel que $\lim_{\varepsilon\searrow 0} \delta_T(\varepsilon) = 0$ et

$$\lambda_T|\theta|^2 \leq \langle\theta, a(x,s)\theta\rangle \leq \Lambda_T|\theta|^2, \quad (s,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^d \ \text{ et } \ \theta \in \mathbf{R}^d,$$

$$|b(x,s)| \leq B_T$$

et

$$\sup_{\substack{0\leq s\leq T\\ |x_1-x_2|\leq\delta_T(\varepsilon)}} \|a(x_1,s) - a(x_2,s)\| \leq \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Alors pour chaque $T > 0$ il existe $\Phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonction croissante qui dépend seulement de $d, T, \lambda_T, \Lambda_T$ et $\delta_T(.)$ tel que $\lim_{\varepsilon\searrow 0} \Phi(\varepsilon) = 0$ et

$$\int_s^T dt \int |p(s,x,t,y+h) - p(s,x,t,y)|dy \leq \Phi(|h|),$$

où $p(s,x;t,y)$ sont les probabilités de transition de la diffusion de dérive b et de covariance a.
Lemme 5:
Soit σ_t la densité de la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance $\nu^2 t$, c'est à dire

$$\sigma_t(x) := \sigma_{\nu^2 t}(x) = (2\pi\nu^2 t)^{-d/2}\ \exp\big(-\frac{|x|^2}{2\nu^2 t}\big).$$

Nous avons les estimations suivantes:

$$\nabla\sigma_t(x) \leq \frac{c}{\sqrt{t}}\ \sigma_{2t}(x). \tag{9}$$

$$|\sigma_{t+h-p}(x) - \sigma_{t+h-p}(x')| \leq c|x-x'|(t-p)^{-(d+1)/2}. \tag{10}$$

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
|\nabla\sigma_t(x)| &= |x|(2\pi\nu^2 t)^{-d/2}(2\nu^2 t)^{-1}\exp\big(-\frac{|x|^2}{2\nu^2 t}\big)\\
&= \frac{|x|}{\sqrt{2\nu^2 t}}\ \exp\big(-\frac{|x|^2}{4\nu^2 t}\big)\ (2\pi\nu^2 t)^{-d/2}\exp\big(-\frac{|x|^2}{4\nu^2 t}\big)(2\nu^2 t)\\
&\leq \frac{c}{\sqrt{t}}\sigma_{2t}(x),
\end{aligned}$$

puisque $\quad \sup_{x\geq 0} x \quad \exp(-x^2) < +\infty.$

Pour la deuxième estimation, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in (x, x')$ tel que

$$|\sigma_{t+h-p}(x) - \sigma_{t+h-p}(x')| \leq |x-x'|\nabla\sigma_{t+h-p}(c_1)$$

et en appliquant (9), on obtient (10). $\blacksquare$

Nous allons maintenant établir les propriétés de ρ_t qui seront utiles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 6:
Soient m une fonction mesurable bornée de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}^d$ et pour tous $t \geq 0$, $f \in C_b^{1,2}([0,t]\times\mathbf{R}^d)$.
Soit $t \to \rho_t$ solution du système:

$$\begin{aligned}
&\int f(t,x)\rho_t(dx) - \int f(0,x)\rho_0(dx)\\
&= \int_0^t \Big(\int \Big[\sum_{j=1}^d m(x,s)\partial_{x_j} f(s,x) + \partial_s f(s,x)\Big]\rho_s(dx) + \frac{\nu^2}{2}\int \Delta f(s,x)\rho_s(dx)\Big)ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

Alors

1) $\rho_t(dx)$ est absolument continue, de densité $\rho_t(x)$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$,

2)Il existe c est une constante qui dépend uniquement de d, $\|m\|_\infty$, T et ν, telle que:

$$i)\ \|\rho_t(.)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1) \ \ \forall t \leq T, \tag{12}$$
$$ii)\ |\rho_t(x)-\rho_s(x)| \leq c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1) \ \ |t-s|^{1/5}, \tag{13}$$
$$\forall s \leq t \leq T,\ \forall x \in \mathbf{R}^d$$
$$iii)\ |\rho_t(x)-\rho_t(y)| \leq c(t^{-(d+1)/2}+1) \ \ |x-y|^{1/2}\ \forall t \leq T, \ \ \forall x,y \in \mathbf{R}^d. \tag{14}$$

Preuve du théorème:
Nous allons reprendre la preuve de la proposition 3.4 telle qu'elle figure dans [3], en y apportant les quelques modifications nécessaires.
Soit $t \to \rho_t$ solution de (11). Pour tous $\gamma \in L^1(\mathbf{R}^d)$, $t \in [0,T]$ et $h > 0$, la fonction $(x,s) \to (\gamma * \sigma_{t+h-s})(x)$ appartient $C_b^2(\mathbf{R}^d \times [0,t])$.
a. Montrons le point 1) du théorème
A partir de (11) et en appliquant

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma_s - \frac{\nu^2}{2}\Delta\sigma_s = 0,$$

on a l'équation

$$\int \sigma_h*\gamma(x)\rho_t(dx) - \int \sigma_{t+h}*\gamma(x)\rho_0(dx) = \int_0^t \int m(x,s).\nabla\sigma_{t+h-s}*\gamma(x)\rho_s(dx)ds.$$

D'où la majoration suivante en utilisant le lemme 5:

$$\begin{aligned}
&|\int \sigma_h*\gamma(x)\rho_t(dx)| \\
&\leq \int \sigma_{t+h}*|\gamma|(x)\rho_0(dx) + \int_0^t \int |m(x,s).\nabla\sigma_{t+h-s}*\gamma(x)|\rho_s(dx)ds \\
&\leq c_2\Big((t+h)^{-d/2}\|\gamma\|_1 + \int_0^t \int |\sigma_{2(t+h-s)}*|\gamma|(t+h-s)^{-1/2}\rho_s(dx)ds\Big) \qquad (15) \\
&\leq c_3\|\gamma\|_1\Big((t+h)^{-d/2} + \int_0^t (t+h-s)^{-(d+1)/2}ds\Big) \\
&\leq c_4\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-1)/2} + \delta_{d,1}|logh| + 1).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \sigma_h*|\gamma(x)|\rho_t(dx) \leq c_4\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-1)/2} + \delta_{d,1}|logh| + 1).$$

Lorsqu'on insère cette inégalité dans l'équation (15), on trouve

$$\begin{aligned}\int \sigma_h * |\gamma(x)|\rho_t(dx) \leq\ & c_3\Big((t+h)^{-d/2}\|\gamma\|_1 \\ & + \int_0^t c_2c_4\|\gamma\|_1((s+2(t+h-s))^{-d/2} + (2(t+h-s))^{-(d-1)/2} \\ & + \delta_{d,1}|log(t+h-s)|(t+h-s)^{-1/2}ds\Big) \\ & \leq c_5\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-2)/2} + \delta_{d,2}|logh| + 1).\end{aligned}$$

Ainsi de suite, on obtient à la d iéme étape:

$$\int \sigma_h * |\gamma|(x)\rho_t(dx)dy \leq c_6\|\gamma\|_1[(t+h)^{-d/2} + |ln(h)| + 1].$$

Enfin

$$\begin{aligned}\int \sigma_h * |\gamma|(x)\rho_t(dx) &\leq c_7\|\gamma\|_1[(t+h)^{-d/2} + \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[|ln(t+h-s)| \\ &+ (t+2(t+h-s))^{-d/2} + 1]ds \\ &\leq I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[ln(t+h-s)+1] \\ &= [-2(t+h-s)^{1/2}(ln(t+h-s)+1)]_0^t - 2\int_0^t (t+h-s)^{-1/2}ds \\ &\leq 2(t+h)^{1/2}ln(t+h) - 2h^{1/2}ln(h) - 4((t+h)^{1/2} - h^{1/2}) \\ &\leq c_8\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}(t+2(t+h-s))^{-d/2} \\ &\leq c_9(t+h)^{-d/2}\end{aligned}$$

d'où

$$|\int \sigma_h * \gamma(x)\rho_t(dx)| \leq c_{10}\|\gamma\|_1(t^{-d/2}+1)$$

uniformément en h, et puisque $\sigma_h * \rho_t$ converge faiblement vers ρ_t lorsque h tend vers 0_+.

On a pour tout ouvert A de $\mathbf{R}^d$ tel que $\lambda(A) < \infty$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\langle \rho_t(dx), 1_A \rangle &\leq \liminf_{h\to 0} \langle \rho_t * \sigma_h, 1_A \rangle \\
&= \liminf_{h\to 0} \langle \rho_t, 1_A * \sigma_h \rangle \\
&\leq c_{11}(t^{-d/2} + 1)\lambda(A).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\rho_t(dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $\rho_t(x)$.

b. Prouvons maintenant le point i) du théorème.

On va montrer par l'absurde que $\rho_t(x) \leq c(t^{-d/2} + 1)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère

$$B_{\varepsilon,t} = \{x \in \mathbf{R}^d : \rho_t(x) > c(t^{-d/2} + 1)(1 + \varepsilon)\}.$$

On suppose que $\lambda(B_{\varepsilon,t}) > 0$, alors il existe un ouvert A tel que

$$B_{\varepsilon,t} \subset A, \qquad \lambda(A \backslash B_{\varepsilon,t}) \leq \lambda(A)\varepsilon/2,$$

or

$$\begin{aligned}
\lambda(A)c(t^{-d/2} + 1) &< \lambda(A)c(t^{-d/2} + 1)(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon/2) \\
&= c(t^{-d/2} + 1)(1 + \varepsilon)(\lambda(A) - \lambda(A)/2) \\
&\leq c(t^{-d/2} + 1)(1 + \varepsilon)(\lambda(A) - \lambda(A\backslash B_{\varepsilon,t})) \\
&= c(t^{-d/2} + 1)(1 + \varepsilon)\lambda(B_{\varepsilon,t}) \\
&\leq \int_{B_{\varepsilon,t}} \rho_t(x)dx \leq \int_A \rho_t(x)dx \\
&\leq \lambda(A)c(t^{-d/2} + 1).
\end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction, par suite on peut affirmer (12).

c. Prouvons maintenant le point ii).

Pour cela on pose $p = t/2$ et $y, y' \in \mathbf{R}^d$ avec $\delta = |y - y'| < 1 \wedge t$, on a

$$
\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx|^2 \\
&= |\int \rho_p(x)[\sigma_{t+h-p}(x-y) - \sigma_{t+h-p}(x-y')]dx \\
&+ \int_p^t \int \rho_s(x)b'(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2 \\
&\leq 3 \int \rho_p(x)[\sigma_{t+h-p}(x-y) - \sigma_{t+h-p}(x-y')]dx|^2 \\
&+ 3|\int_p^{t-\delta} \int \rho_s(x)b'(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2 \\
&+ 3|\int_{t-\delta}^t \int \rho_s(x)b'(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2
\end{aligned}
$$

En appliquant le lemme 5 on trouve

$$
\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx|^2 \\
&\leq c_{10}\Big(|y-y'| \int \rho_p(x)(t-p)^{-(d+1)/2}dx\Big)^2 \\
&+ c_{11}\Big(\int_p^{t-\delta} ds \int \rho_s(x)(t+h-s)^{-1/2}\Big|\frac{(x-y)}{(t+h-s)^{1/2}}\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4(t+h-s)}\big) \\
&- \frac{(x-y')}{(t+h-s)^{1/2}}\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)\Big|(2\pi(t+h-s)^{-d/2})\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4(t+h-s)}\big)\Big)^2 \\
&+ \Big(\int_p^{t-\delta} \int \rho_s(x)(t+h-s)^{-1/2}\frac{(x-y')^2}{(t+h-s)^{1/2}}\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{8(t+h-s)}\big) \\
&2\pi(t+h-s)^{-d/2}\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{8(t+h-s)}\big)\Big|\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4(t+h-s)} \\
&- \exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)\Big|ds\Big)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \Big(\int_{t-\delta}^t ds \int \rho_s(x)(t+h-s)^{-1/2}\Big(\frac{|x-y|}{(t+h-s)^{1/2}}\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4(t+h-s)}\big) \\
&.\exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4(t+h-s)}\big) + \frac{|x-y'|}{(t+h-s)^{1/2}} \\
&\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)\Big)(2\pi(t+h-s)^{-d/2})\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Il est alors clair que

$$|\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx|^2 \leq c_{12}\Big[|y-y'|^2$$
$$+|y-y'|^2\Big(\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1}ds\Big)^2 + \Big(\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1/2}ds\Big)^2\Big](t^{-(d+1)/2}+1)$$
$$\leq c_{13}|y-y'|(t^{-(d+1)/2}+1)$$

puisque $\sup_{x\geq 0}\ x \quad \exp(-x^2) < +\infty$. D'autre part

$$\lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx = \rho_t(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx = \rho_t(y').$$

On en déduit que

$$|\rho_t(y)-\rho_t(y')| \leq c_{14}(t^{-(d+1)/2}+1)|y-y'|^{1/2}.$$

d. On peut maintenant achever la démonstration du théorème.
Montrons la dernière estimation c'est à dire

$$|\rho_t(x)-\rho_s(x)| \leq c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1) \quad |t-s|^{1/5}$$

Pour $0<s<t$ et $h=|t-s|^{4/5}$ on obtient

$$\begin{aligned}|\rho_t(y)-\rho_s(y)| &\leq |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx| + |\int [\rho_t(x)-\rho_s(x)]\sigma_h(x-y)dx| \\ &+ |\int [\rho_s(x)-\rho_s(y)]\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}I_1 &= |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq c_{15}(t^{-(d+1)/2}+1)|\int |y-x|^{1/2}\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq c_{16}(t^{-(d+1)/2}+1)h^{1/4}.\end{aligned}$$

En procédant de la même façon on obtient

$$I_3 \leq c(s^{-(d+1)/2}+1)h^{1/4}.$$

Passant maintenant au dernier terme,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= |\int [\rho_t(x) - \rho_s(x)]\sigma_h(x-y)dx| \\
&= \int_s^t \int \rho_r(x)[m(x,r).\nabla_x\sigma_h(x-y) + \frac{1}{2}\Delta_x\sigma_h(x-y)dxdr|
\end{aligned}
$$

Donc, d'après le point i) du théorème:

$$
\begin{aligned}
& I_2 \leq c(s^{-d/2}+1)\int_s^t \int \Big(\frac{|x-y|}{h} + \frac{1}{2}\Big(\frac{(x-y)^2}{h^2} + \frac{d}{h}\Big)\Big) \\
& \exp\big(-\frac{(x-y)^2}{2\nu^2 h}\big)(2\pi\nu^2 h)^{-d/2}du \\
& \leq c(s^{-d/2}+1)||t-s|[h^{-1/2}+h^{-1}](2\pi\nu^2 h)^{-d/2}\int \exp\big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2 h}\big)dx \\
& \leq c|t-s|h^{-1}(s^{-(d+1)/2}+1) \\
& \leq c|t-s|^{1/5}(s^{-(d+1)/2}+1) \qquad \text{par définition de } \ h. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'égalité suivante:

$$g(s) = E[v(X_0)|X_s = x] + b(x,s),$$

qui terminera la preuve de l'existence de notre processus.
Soient $T_2 > T_1 > 0$ et

$$f^+_{n,1} : (x,t) \to C\int\int v^+_1(y)\phi^n(x-z)\rho^n_{0,t}(dy,dz)\delta(t),$$

où $C^{-1} = (T_2 - T_1)\int v^+_1(y)\ \rho_0(dy)$ et $\delta(t) = 1_{[T_1,T_2]}(t)$.

$f^+_{n,1}$ est donc une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^d$.
On sait que $\rho^n_{0,t}$ converge faiblement vers $\rho_{0,t}(dy,dz)$ et X_t a une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. Alors la mesure $\int v^+_1(y)\rho_{0,t}(dy,dx)$ a aussi une densité, notée $\int v^+_1(y)\rho_{0,t}(dy,x)$.
Si on note

$$f^+_1(x,t) = C\int v^+_1(y)\rho_{0,t}(dy,x)\delta(t)$$

alors pour tous $\psi \in C_b(\mathbf{R}^{d+1})$

$$\int\int f^+_{n,1}(x,t)\psi(x,t)dxdt \to \int\int f^+_1(x,t)\psi(x,t)dxdt.$$

On va montrer que $(f_{n,1}^{+}, f_1^{+})$ vérifie l'hypothèse du lemme 3.
Soit h, η deux réels positifs, on a

$$\begin{aligned}
&\int\int |f_{n,1}^{+}(x+h,t+\eta) - f_{n,1}^{+}(x,t)| \\
&= C[\int\int | \int\int v_1^{+}(y)\phi^n(x+h-z)\rho_0(dy)p(0,y;t+\eta,z)\delta(t+\eta) \\
&- \phi^n(x-z)p(0,y;t,z)\rho_0(dy)dz\delta(t)|dxdt \\
&\leq I_1 + I_2
\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = C[\int\int | \int\int v_1^{+}(y)[\phi^n(x+h-z) - \phi^n(x-z)]\rho_0(dy)p(0,y;t+\eta,z)dz| \\ \delta(t+\eta)\ dx\ dt$$

et

$$I_2 = C[\int_0^T \int | \int\int v_1^{+}(y)\phi^n(x-z)[\delta(t+\eta)p(0,y;t+\eta,z) - \delta(t)p(0,y;t,z)] \\ \rho_0(dy)\ dz|\ dx\ dt.$$

On a

$$I_1 = C[\int\int | \int\int v_1^{+}(y)\phi^n(z)\rho_0(dy)[p(0,y;t+\eta,z+x+h) - p(0,y;t+\eta,z+x)]dz| \\ \delta(t+\eta)\ dx\ dt.$$

Du lemme 4 on déduit qu'il existe une fonction Φ qui dépend de d, T_2, $\|v\|_\infty$ telle que

$$I_1 \leq C\|v_1^{+}\|_\infty \Phi(h).$$

Pour I_2 il suffit de montrer que

$$I_3 = \sup_n \int_{T_1}^{T_2} \int | \int\int v_1^{+}(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[p(0,y;t+\eta,z) - p(0,y;t,z)]dz|dxdt,$$

tend vers 0 quand $\eta \to 0$.
Pour chaque $K > 0$ le terme I_3 peut s'écrire comme somme de deux termes I_4 et I_5, où

$$I_4 = \sup_n \int_{T_1}^{T_2} \int | \int\int_{[|z|\leq K]} v_1^{+}(y)\phi^n(x-z)[p(0,y;t+\eta,z) - p(0,y;t,z)] \\ \rho_0(dy)dz|\ dx\ dt$$

et

$$I_5 = \sup_n \int_{T_1}^{T_2} \int | \int \int_{[|z|>K]} v_1^+(y)\phi^n(x-z)[p(0,y;t+\eta,z) - p(0,y;t,z)]$$
$$\rho_0(dy)\ dz|\ dx\ dt.$$

D'après le point ii) du théorème 6

$$\int_{T_1}^{T_2} \int | \int \int_{[|z|\le K]} v_1^+(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[p(0,y;t+\eta,z) - p(0,y;t,z)]dz|dxdt$$
$$\le c\|v_1^+\|_\infty \eta^{1/5} \int_{T_1}^{T_2} (t^{-(d+1)/2}+1)\lambda(B(0,K))dt.$$

D'autre part, si on pose $X_t^y = y + \int_0^t b_n(s, X_s^y)ds + \nu B_t$, avec b_n bornée, on déduit que

$$I_5 \le 2\|v_1^+\|_\infty \sup_{t\in[T_1,T_2+1]} \int \rho_0(dy)P(|X_t^y| \ge K).$$

Comme

$$P(|X_t^y| \ge K) \le P(|\nu B_t| \ge K/2) + P(|y| + t\|b_n\|_\infty \ge K/2)$$

$\int P(|X_t^y| \ge K)\rho_0(dy) \to 0$ lorsque $K \to +\infty$ uniformément pour $t \in (T_1, T_2+1)$ et n.
On conclut en appliquant le lemme 3 que $f_{n,1}^+ \to f_1^+$ dans $L^1(\mathbf{R}^{d+1})$, donc on peut supposer que $f_{n,1}^+(x,t) \to f_1^+(x,t)$ presque sûrement.
La démonstration pour $(f_{n,i}^+, f_i^+)$ et $(f_{n,i}^-, f_i^-)$ est analogue pour tout $1 \le i \le d$.
On déduit que

$$\int \int v(y)\phi^n(x-z)\rho_{0,t}^n(dy,dz) \to \int v(y)\rho_{0,t}(dy,x) \qquad \text{presque sûrement.}$$

De la même façon on démontre que

$$\int \phi^n(x-z)\rho_t^n(dz) \to \rho_t(x) \qquad \text{presque sûrement.}$$

D'où

$$g(t) = b(x,t) + \frac{\int v(y)\rho_{0,t}(dy,x)}{\rho_t(x)}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1

4 L'unicité de la solution.

Dans cette section, nous allons étudier l'unicité de la solution du système $S(d)$.

Théorème 7.

Le système $S(d)$ possède une seule solution faible.

Preuve

Soit la solution faible du système $S(d)$ ayant la représentation suivante:

$$q_i(x,t) : u(x,t)\rho(x,t) = \int v_i(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy, \tag{16}$$

$p(0,y;t,x)$ sont les probabilités de transitions, solution fondamentale de l'équation parabolique:

$$\partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\rho(b+u) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(\rho).$$

Soient $q_0(x,t) = q_0(x,t,+) = q_0(x,t,-) = \rho(x,t)$ et

$$q_i(x,t,+) = \int v_i^+(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy,$$

$$q_i(x,t,-) = \int v_i^-(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy.$$

On a $q_i(x,t) = q_i(x,t,+) - q_i(x,t,-)$. Pour $\varepsilon = +,-$ si

$$\frac{1}{c_i^\varepsilon} = \int v_i^\varepsilon(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy$$

on démontre facilement que $t \to c_i^\varepsilon q_i(x,t,\varepsilon)$ est une famille de probabilité de densité sur $\mathbf{R}^d$, solution de

$$\partial_t(q) + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}(p+b)\ q = \frac{\nu^2}{2}\Delta(q), \tag{17}$$

où

$$p(x,t) = \frac{1}{q_0(x,t)}(q_1(x,t),...,q_d(x,t)) \qquad 0 \leq i \leq d.$$

D'après le théorème 6, il existe une constante c qui dépend uniquement de $\|v\|_\infty$, ν et d tel que pour $i = 0,...,d$, $\varepsilon = +,-$

$$\|q_i(.,t,\varepsilon)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1),$$
$$|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y,s,\varepsilon)| \leq c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1)\ \ |t-s|^{1/5},$$
$$|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y',t,\varepsilon)| \leq c(t^{-(d+1)/2}+1)\ \ |x-y|^{1/2}.$$

On peut montrer également que $q = (q_0(x,t), q_1(x,t,+), q_1(x,t,-), ..., q_d(x,t,+), q_d(x,t,-)) := (q_i(\varepsilon) : 0 \le i \le d, \varepsilon = +,-)$ est solution faible du système

$$\begin{cases} \partial_t(q_i(\varepsilon)) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} q_i(\varepsilon)(F(q)+b) = \frac{\nu^2}{2}\Delta q_i(\varepsilon) \\ \forall 1 \le i \le d \quad, \varepsilon = +,- \\ q_i(\varepsilon, dx, t) \to q_i(\varepsilon, dx, 0) \ \text{ faiblement pour } t \to 0^+ \end{cases}$$

avec

$$F(q) = \frac{1}{q_0}(q_1(+) - q_1(-), ..., q_d(+) - q_d(-)).$$

On peut remarquer que $q \to q_i(\varepsilon)F(q)$ est lipschitzienne continue sur le domaine

$$D = \{q \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{2d} : |q_i(+)| \le \|v\|_\infty q_0, |q_i(-)| \le \|v\|_\infty q_0 \forall 1 \le i \le d\}.$$

On note $|q| := q_0 + \sum_{i=1}^d |q_i(+)| + |q_i(-)|$.
Soient deux solutions faibles $(q_i^1, 0 \le d)$, $(q_i^2, 0 \le d)$ de $S(d)$ avec condition initiale identique ρ_0, v et ayant la représentation 16.
On se propose de montrer que $\forall\ 1 \le i \le d$

$$q_0^1(x,t) = q_0^2(x,t), q_i^1(x,t,+) = q_i^2(x,t,+), q_i^1(x,t,-) = q_i^2(x,t,-).$$

De (17) on déduit pour toute $f \in C_d^2(\mathbf{R}^d \times [0,T]$ et pour $i = 0,..,d$

$$\begin{aligned} \int f(t,x) q_i^1(x,t,+)dx - \int f(0,x) q_i^1(dx,0) \\ = \int_0^t \Big(\int \Big[(F(q)+b)\nabla f(s,x) + \partial_s f(s,x)\Big] q_i^1(x,t,+)dxds \\ + \frac{\nu^2}{2} \int \Delta f(s,x)dx q_i^1(x,t,+)dx\Big)ds \end{aligned} \tag{18}$$

donc

$$\begin{aligned} &|q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)| \\ &= |\int_0^t \int \Big(\Big[(F(q^1(x,s)) + b(x,s)).(-\frac{x-y}{t-s})\sigma_{t-s}(y-x)\Big] q_i^1(x,s,+) - \\ &\Big[(F(q^2(x,s)) + b(x,s)).(-\frac{x-y}{t-s})\sigma_{t-s}(y-x)\Big] q_i^2(x,s,+)\Big). \end{aligned}$$

Par convolution avec σ_h , $h > 0$, on a

$$\int |q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)|\sigma_h(x-y)dy \leq \int_0^t \int\int |\Big[F(q^1(z,s))q_i^1(z,s,+)$$
$$- F(q^2(x,s))q_i^2(z,t,+)\Big]|\frac{|z-y|}{t-s}\sigma_{t-s}(z-y)\sigma_h(x-y)dzdyds$$
$$+ \int_0^t \int\int |b(x,s)[q_i^1(z,s,+) - q_i^2(z,s,+)]\frac{z-y}{t-s}|\sigma_{t-s}(z-y)\sigma_h(x-y)dzdyds$$
$$\leq c\int_0^t \int\int |q^1(z,s) - q^2(z,s)|(t-s)^{-1/2}\frac{|z-y|}{(t-s)^{1/2}}\exp\Big(-\frac{(z-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)$$
$$.(2\pi\nu^2(t-s))-d/2\exp\Big(-\frac{(z-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)\sigma_h(x-y)dzdyds$$
$$\leq c\int_0^t \int |q^1(z,s) - q^2(z,s)|(t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.$$

De la même façon on montre que

$$\int |q_i^1(y,t,-) - q_i^2(y,t,-)|\sigma_h(x-y)dy$$
$$\leq c\int_0^t \int |q^1(z,s) - q^2(z,s)|(t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.$$

Par conséquent

$$\int |q_i^1(y,t) - q_i^2(y,t)|\sigma_h(x-y)dy$$
$$\leq c\int_0^t \int |q^1(z,s) - q^2(z,s)|(t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.$$

Si on pose

$$Q(h,t,x) = \int |q_i^1(y,t) - q_i^2(y,t)|\sigma_h(x-y)dy$$

alors

$$Q(h,t,x) \leq \int_0^t Q(2(t-s)+h,s,x)(t-s)^{-1/2}ds. \tag{19}$$

D'autre part, on sait que

$$Q(h,t,x) \leq ch^{-d/2}.$$

On insère cette inégalité dans (19). On obtient

$$\begin{aligned}
Q(h,t,x) &\le \int_0^t (t-s)^{-1/2}(2(t-s)+h)^{-d/2}ds \\
&\le c\Big(\int_0^{t-h}(t-s)^{-(d+1)/2}ds + \int_{t-h}^t (t-s)^{-1/2}h^{-d/2}ds\Big) \\
&\le c(h^{-(d-1)/2} + \delta_{d,1}|\log h| + 1).
\end{aligned}$$

On recommence:

$$Q(h,t,x) \le c(h^{-(d-2)/2} + \delta_{d,2}|\log h| + 1).$$

Finalement en itérant ce procédé, on arrive au résultat suivant:

$$Q(h,t,x) \le c \qquad \text{uniformément pour} h > 0, t \in (0,T], x \in \mathbf{R}^d.$$

D'autre part

$$\lim_{h\to 0} Q(h,t,x) = |q_i^1(x,t) - q_i^2(x,t)|$$

ce qui implique

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d, t\in(0,T]} |q_i^1(x,t) - q_i^2(x,t)| < \infty.$$

De plus pour $t \in (0,T']$

$$\begin{aligned}
&|q_i^1(y,t) - q_i^2(y,t)| \le c\int_0^t \sup_{z\in\mathbf{R}^d, v\in(0,T']} |q_i^1(z,v) - q_i^2(z,v)|\Big((t-s)^{-1/2} \\
&(2\pi\nu^2(t-s))^{-d/2}. \int \Big(\frac{|x-y|}{(t-s)^{1/2}}\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)dx\Big)ds \\
&\le c \sup_{z\in\mathbf{R}^d, v\in(0,T']} |q_i^1(z,v) - q_i^2(z,v)| \int_0^t (t-s)^{1/2}ds \\
&\le c \sup_{z\in\mathbf{R}^d, v\in(0,T']} |q_i^1(z,v) - q_i^2(z,v)|\sqrt{T'}.
\end{aligned}$$

On a cette majoration uniformément pour $t \in (0,T']$, $y \in \mathbf{R}^d$, d'où

$$\sup_{z\in\mathbf{R}^d, t\in(0,T']} |q_i^1(z,t) - q_i^2(z,t)| \le c \sup_{z\in\mathbf{R}^d, v\in(0,T']} |q_i^1(z,v) - q_i^2(z,v)|\sqrt{T'}.$$

Soit $T' < c^{-2}$, pour ce choix on obtient

$$\sup_{z\in\mathbf{R}^d, t\in(0,T']} |q_i^1(z,t) - q_i^2(z,t)| = 0.$$

On peut procéder pour $[T', 2T']$ comme pour $(0, T']$ précédemment et on arrive enfin au résultat désiré, c'est à dire

$$\sup_{z \in \mathbf{R}^d, t \in (0,T]} |q_i^1(z,t) - q_i^2(z,t)| = 0. \quad \blacksquare$$

Références

[1] A. Dermoune, *Propagation and conditional Propagation of chaos for Pressureless gas equations, to appear in Probability Theory and related fiels .*

[2] P. A. Meyer, W. A. Zheng, *Tightness criteria for laws of semimartingales.*, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol. 20, n°4, 1984, p. 353-372.

[3] K. Oelshlager,, *A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw., 69 (1985), p. 279-322.

[4] D. Strook, S.R.S. Varadhan, *Multidimentional Diffusion Processus.*, New York, Springer-Verlag 1979.

[5] W. Zheng,, *Conditional propagation of chaos and a class of quasilinear PDE'S.*