Recherche, première partie

1. Thèse

J'ai effectué ma thèse sous la direction de Azzouz DERMOUNE au sein du laboratoire Paul Painlevé de l'université des sciences et technologies de Lille . Au cours de ma thèse, nous nous sommes intéressés à la généralisation du système de gaz sans pression donnée par le système d'équations suivantes :

$$\mathcal{S}\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(u\rho) = 0 \\ \partial_t(u\rho) + \partial_x(u^2\rho) = 0 \\ \rho(dx,t) \to \rho_0(dx), \quad u(x,t)\rho(dx,t) \to u_0(x)\rho_0(dx) \\ \text{faiblement pour } t \to 0^+. \end{cases}$$

Ce système a fait l'objet de plusieurs travaux (Brenier, Bouchut, Rykov). D'un point de vue de la physique, ce système a été étudié comme modèle de particules collantes par Zeldovich :
on considère un système de particules $\{x_i^0\} \subset \mathbf{R}$ ayant comme vitesses initiales $\{v_i^0\}$ et pour masses initiales $\{m_i^0\}$. Les particules se déplacent avec une vitesse constante entre les chocs. Pendant le choc, les particules qui se rencontrent forment une nouvelle particule massive. Sa masse et sa vitesse sont données par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Mathématiquement, les solutions de ce système sont naturellement des mesures. Ainsi La famille $t \to (\rho(dx,t), u(x,t))$ doit être une solution faible de ce dernier système.

L'existence globale d'une solution faible a été obtenue par Brenier, Grenier et E, Rykov and Sinai. Une approche probabiliste a été faite par Dermoune. Il a montré que les trajectoires des particules collantes sont modélisées par un processus stochastique, solution de l'équation différentielle

$$dX_t = \mathbf{E}[u_0(X_0) \,|\, X_t]dt, \quad \text{loi}(X_0) = \rho(dx,0). \tag{1}$$

Les techniques utilisées dans tous ces travaux sont difficiles à étendre en dimension $d > 1$. Le problème des particules collantes en dimension $d > 1$ est une question difficile. Une tentative a été faite par Dermoune et Djehiche. Ils ont introduit la viscosité dans le système (1) et obtiennent le système différentielle stochastique non linéaire suivant :

$$dX_t = \mathbf{E}(u(X_0) \,|\, X_t)dt + \nu dB_t, \tag{2}$$

où B est un mouvement brownien sur $\mathbf{R}^d$ et $P(X_0 \in dx) := \rho(dx, 0)$ est la loi de X_0. En utilisant la formule d'Itô combinée avec des techniques d'analyse, Dermoune a montré l'existence et l'unicité faible du système (2). Il a déduit que $(\rho(dx, t) = P(X_t \in dx), u(x, t) := \mathbf{E}(u_0(X_0) \,|\, X_t = x))$ est l'unique solution faible du système suivant :

$$\mathcal{S}(d,\nu) \begin{cases} \partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_j\rho) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(\rho) \\ \partial_t(u_i\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_iu_j\rho) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(u_i\rho),\ \forall\, 1 \le i \le d \\ \rho(dx,t) \to \rho(dx,0),\ u(x,t)\rho(dx,t) \to v(x)\rho(dx,0) \text{ as } t \to 0^+. \end{cases}$$

Les données initials $(\rho(dx, 0), v := (v_1, ..., v_d))$ représentent la densité de la matière et la vitesse à l'instant $t = 0$. Dans le cas $\nu = 0$ le dernier système devient

$$\mathcal{S}(d,0) \begin{cases} \partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_j\rho) = 0 \\ \partial_t(u_i\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_iu_j\rho) = 0,\ \forall\, 1 \le i \le d \\ \rho(dx,t) \to \rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t) \to v_i(x)\rho_0(dx) \text{ as } t \to 0^+. \end{cases}$$

Ce système est appelé système de gaz sans pression. Il apparaît dans les méthodes de constructions numériques des solutions de l'équation d'Euler (**Agar, Baraille, Li**).

Il est intéressant et difficile d'obtenir $\mathcal{S}(d, 0)$ en faisant tendre la viscosité $\nu \to 0$ dans le système $\mathcal{S}(d, \nu)$ ou d'une façon équivalente dans (2). Malheureusement, même dans le cas de deux particules initialement situées en $a, b \in \mathbf{R}^d$ et ayant respectivement comme vitesses et masses initiales v_1, v_2 et $p, 1-p$ (c'est-à-dire $\rho(dx, 0) = p\delta_a + (1 - p)\delta_b, v(x)\rho(dx, 0) = pv_1\delta_a + (1-p)v_2\delta_b$), l'étude de la limite de $EDS(\nu)$ lorsque $\nu \to 0$ s'avère difficile.

1.1 Diffusion avec interaction entre deux types de particules et système de gaz sans pression avec viscosité

Le premier résultat de ma thèse donne une nouvelle solution probabiliste au système $\mathcal{S}(d, \nu)$. Nous construisons deux diffusions indépendantes $X_t^a = a + \int_0^t u(X_s^a, s)ds + \nu B_t^a, X_t^b = b + \int_0^t u(X_s^b, s)ds + \nu B_t^b$, ayant la même viscosité $\nu \neq 0$ et la même dérive

$$u(x,t) = \frac{p\rho_t^a(x)v_1 + (1-p)\rho_t^b(x)v_2}{p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x)},$$

où ρ_t^a, ρ_t^b sont respectivement les densités de X_t^a et X_t^b. Nous montrons que la famille $(\rho_t(x) = p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x), u(x,t) : t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d)$ est l'unique solution faible du système de gaz sans pression $\mathcal{S}(d,\nu)$ avec condition initialle $(p\delta_a + (1-p)\delta_b, v_1 := v(a), v_2 := v(b))$. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans les comptes rendus de l'academie des sciences de Paris.

1.2 Estimation de la densité de diffusion

Une autre partie de ma thèse traite de l'estimation de la densité $G(t,x,y)$ de la diffusion dont le générateur est donné par

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}.$$

Afin d'expliquer notre contribution, on rappelle le résultat suivant de Sheu :

Soit $g(x)$ la matrice inverse de $a(x)$, il existe des fonctions k_1, k_2, c_1 et c_2 à valeurs strictement positives telles que pour $x, y \in R^d$.

$$\frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{det\ a(y)}} k_2(t)\exp(-c_2(t)I_b(t,x,y)) \leq G(t,x,y) \qquad (3)$$

$$G(t,x,y) \leq \frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{det\ a(y)}} k_1(t)\exp(-c_1(t)I_b(t,x,y)) \qquad (4)$$

où

$$I_b(t,x,y) = \inf\{\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} g_{ij}(\phi(s))(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))_i(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))_j ds$$

$$\phi(0) = x,\ \phi(t) = y\}.$$

Notre contribution consiste à préciser les constantes c_1, c_2 en fonction du spectre de la matrice inverse de a et du temps.

Nous avons ensuite utilisé ce résultat pour obtenir l'existence et l'unicité du système

$$\mathcal{S}(a,b)\begin{cases}\partial_t(\rho)+div(u\rho)=L^*(\rho)\\ \partial_t(u_i\rho)+div(u_iu\rho)=L^*(u_i\rho),\\ \forall\, 1\leq i\leq d,\ \ \rho(dx,t)\to\rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t)\to v_i(x)\rho_0(dx)\\ \text{weakly, as }\ t\to 0^+\end{cases}$$

où L^* est l'adjoint formelle de l'opérateur L. Ce système coïncide avec celui étudié par A. Dermoune (2003), lorsque a est la matrice identité et $b=0$.

Recherche, deuxième partie

Modélisation stochastique et simulation du vent aux petites échelles :
Depuis deux ans, l'équipe OMEGA/TOSCA de l'INRIA, le Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD : Ecole Polytechnique, E.N.S. et Université Paris 6) et l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie ADEME, travaillent à modéliser des quantités caractéristiques de l'activité locale du vent (direction, vitesse, stabilité, éventuellement d'autres à déterminer) en des zones d'implantation d'éoliennes en France.

Cette modélisation a pour but d'être intégrée à terme dans l'évaluation numérique de ressources énergétiques locales soumises à des aléas climatologiques et météorologiques, et dans des simulations de gestion de telles ressources.

Les modèles que nous utilisons adoptent, aux petites échelles, le point de vue lagrangien de l'écoulement. Ils se présentent sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques fortement non linéaires (au sens de McKean) et dont la dimension dépend de la complexité du fluide considère. Ceux sont des équations de Langevin.

En effet, nous employons des processus stochastiques pour modéliser des phénomènes à échelle réduite. Ces modèles stochastiques, empruntés à S.B. pope (université Cornell), consistent en l'utilisation des équations stochastiques à modéliser la dynamique d'une particule liquide. Dans le contexte de la simulation météorologique, ce procédé d'accouplement est nouveau et exige des études théoriques et numériques originales.

La première partie de mon travail a été l'étude de l'existence et l'unicité d'un système d'équations qui représente la position, la vitesse et la fréquence de turbulence de particules confinées dans un demi plan.
On est arrivé pour le moment, a montrer l'existence et l'unicité du système. Il nous reste à vérifier les conditions au bord, ditent conditions speculaire pour conclure la partie théorique. C'est un travail qui est en cours de preparation et qui serra bientôt soumis.
La seconde partie est orientée vers les simulations numériques du système.